

带非线性支撑的转子有限元模型求解方法

韩兵兵^{1,2}, 丁 千²

(1. 湖南第一师范学院 数学与计算科学学院, 长沙 410205;

2. 天津大学 机械工程学院 力学系, 天津 300350)

摘 要: 用数值方法研究了非线性支撑的柔性转子系统的动学行为,提出了一种将有限元与非线性支撑结合的模型和求解方法。利用有限元法(FEM)构建转轴和转盘部分的模型,通过矩阵进行组合;利用离散元方法对包含滚动轴承和挤压油膜阻尼器(SFD)的支撑部分进行建模,此部分包含 4 个单元,分别为轴承内圈、外圈、SFD 内圈和支撑鼠笼。有限元部分和离散元部分通过轴端节点相连,仿真过程中轴端位移传递给非线性支撑部分,支撑部分通过位移计算得到的非线性力反过来作用于有限元转子轴端部分。为了耦合求解有限元转子和非线性支撑组成的数学模型,提出了一种综合的迭代求解方法,克服传统的有限元求解方法对轴端隐性非线性支撑的求解局限性。由于转轴部分采用了 Timoshenko 梁单元建模,对比与简单转子模型,可以考虑陀螺力矩和轴的柔性特征,更能体现非线性支撑对振动真实影响。在建立的 20 个轴单元的有限元转子模型中,非线性响应更多体现在靠近非线性支撑的节点 1 和节点 21 处,响应频谱中靠近轴端的节点能体现出滚动轴承的 2 倍和 3 倍变柔振动频率。

关 键 词: 滚动轴承; 挤压油膜阻尼器(SFD); 有限元柔性转子; 非线性支撑; 分岔图

中图分类号: V214.1; O347.6

文献标志码: A

Solution method of rotor finite element model with nonlinear support

HAN Bingbing^{1,2}, DING Qian²

(1. Mathematics and Computational Science,

Hunan First Normal University, Changsha 410205, China;

2. Department of Mechanics,

School of Mechanical Engineering, Tianjin University, Tianjin 300350, China)

Abstract: The dynamic behavior of a flexible rotor system with nonlinear support was studied by the numerical method of a model and the solution combining the finite element model with nonlinear supports. The finite element method (FEM) was used to build the model of the rotating shaft and the rotary table, and the matrix was used for combination; the discrete element method was used to model the support (including: rolling bearing and squeeze film damper (SFD)), which specifically consists of four elements: bearing inner ring, outer ring, SFD inner ring and supporting cage. The finite element part and the discrete element part were connected by the nodes at the shaft end, and the displacement at the shaft end was transmitted to the nonlinear support. The nonlinear force and the nonlinear support calculated by the displacement at the support acted on the finite element rotor part at

收稿日期:2020-05-24

基金项目:国家自然科学基金(51575378)

作者简介:韩兵兵(1988—),男,讲师,博士,主要从事机械振动、转子动力学、有限元结构分析和故障诊断与故障学习等方向的研究。

引用格式:韩兵兵,丁千.带非线性支撑的转子有限元模型求解方法[J].航空动力学报,2020,35(12):2616-2625. HAN Bingbing, DING Qian. Solution method of rotor finite element model with nonlinear support[J]. Journal of Aerospace Power, 2020, 35(12):2616-2625.

the shaft end in turn. In order to solve the coupling problem of the finite element rotor and the nonlinear support, a comprehensive iterative method was proposed to overcome the limitation of the traditional finite element method for solving the implicit nonlinear support at the shaft end. Because the Timoshenko beam element was used to model the rotating shaft, the gyroscopic moment and the flexibility of the shaft can be considered, which can better reflect the real effect of nonlinear support on the vibration. In the 20 shaft finite elements rotor model, the nonlinear response was more reflected in the 1 and 21 nodes closed to the nonlinear supports, and the nodes near the shaft end in the response spectrum can reflect two times and three times the flexible vibration frequency of the rolling bearing.

Key words: rolling bearing; squeeze film damper (SFD);
finite element flexible rotor; nonlinear support; bifurcation diagram

转子系统是旋转机械的主要组成部分,如汽轮机、发电机、电动机、压气机等。润滑油膜、滚动轴承、SFD(squeeze film damper)、密封件以及动静部件间的摩擦行为等所产生的非线性力会引起转子运动的不稳定甚至结构损伤。通常,这些非线性力仅局部作用于转轴两端或其他位置^[1-7]。

大多数关于转子非线性的文献都是通过简单的转子模型完成的,例如 Jeffcott 转子,它将轴简化为一个恒定刚度,而转盘简化为一个刚性质量。在这种模型的基础上,学者们揭示并讨论了丰富的非线性动力学行为^[8-10]。Jiang 等^[11]讨论了球面微变形滑动轴承支承的 Jeffcott 转子动力学特性,发现其临界转速和不平衡响应将受到较大影响。凹形变形轴承的承载能力随凸形变形略有下降,随凸形变形轴承的承载能力显著增加。Litak、Jahromi 等^[12-13]研究了 Jeffcott 转子在摩擦作用下的解和分叉行为。该模型考虑了转子与定子之间的惯性、干摩擦和接触损耗。他们发现了对混沌行为敏感的参数。Ding 等^[14]讨论了密封液对 Jeffcott 转子稳定性的影响。基于简单转子系统的这些结论可以很好地揭示轴承零件的非线性特性,但由于简化了轴的等刚度和刚性质量,因此不能揭示轴和盘上复杂结构的非线性特性。

转子动力学中的有限元法通常用于考虑结构中的线性细节,如非对称结构和剪切力、轴和盘中的扭转力矩和陀螺力矩。许多学者致力于用有限元法分析转子系统的结构问题。Liu 等^[15]用有限元法对单级超声速轴流压气机进行了局部周向和整体周向特性研究,发现在相同槽数的情况下,增加局部周向和整体周向肋条两种处理方法都能获得更好的压气机性能。Wu 等^[16]用有限元法对某型航空发动机高压压气机进行了结构研究。给出了有无内部结构时计算模型固有频率的差异。然

而,有限元法不能处理受位移影响的非线性支承力,传统的求解方法显式 Newmark- β 要求外力部分不能为位移的函数。基于有限元分析的转子动力学软件 ANSYS、Dynamics R4 和 DyRo-Bes 都只能将球轴承简化为不同方向的支撑刚度。隐式有限元法是处理轴承非线性力的一种可选方法,但计算量大。

近年来,许多研究者致力于组合建模方法和相应的数值方法来模拟转子系统。马威猛等^[17]建立了非对称转子结构的三维有限元模型,其中轴承部分采用时变系数微分方程进行模拟。采用基于 Floquet 理论和 Hill 展开法的混合数值方法。Brouwer 和 Sadeghi^[18]采用显式有限元和离散元相结合的方法建立了转子-弹壳模型。研究了系统通过临界转速时轴和轴承的运动。陈果^[19]建立了包含转子元件和轴承元件的广义复合转子-支承-壳体耦合动力学模型,研究了发动机整机特性。事实上,为了更好地揭示转子系统的动力学特性,在动力学模型中必须同时考虑非线性和复杂结构细节。在有限元转子模型中考虑非线性力的分析是一项有意义的工作。

1 有限元-非线性支撑转子模型

1.1 有限元转子模型

简单的转子模型,如 Jeffcott 转子,常被用来研究转子系统的非线性动力学。然而,转子结构的许多重要特性,如轴的剪切力、扭转力和圆盘产生的陀螺力矩,在简单的模型中却被忽略了。本文采用有限元法对线性转子部分进行建模。采用 Timoshenko 梁单元定义长径比较低轴段。有限元转子模型和三维有限元(FEM)转子轴承模型如图 1 和图 2 所示。轴分为 20 个部分,21 个节

点(图 1 中 P1~P21),84 个自由度,每个轴截面用 8 个自由度的 Timoshenko 梁有限元描述。图中 k_b 为滚动轴承的接触刚度,由滚动轴承公式确定,周期变化。 k_c 为同挤压油膜阻尼器内圈相连的鼠笼弹簧刚度。 $x_e、y_e$ 代表轴端处轴心位移, $x_g、y_g$ 代表滚动轴承外圈(SFD 内圈)的位移。 e' 代表转盘的偏心距。将附着在轴上的圆盘简化为集总质量,并考虑极惯性矩和径向惯性矩,利用 CAD(computer aided design)软件从三维模型中进行估计并考虑了陀螺力矩的耦合作用^[16,20-21]。

Timoshenko 梁理论可以考虑轴向剪切变形对短粗轴的动力学性能的影响,可同时考虑轴向载荷引起的角惯性和剪应力。单元具有 8 个自由度,每个自由度有两个平动和两个转动,用于模拟图 1 中的轴段,如图 2 所示。图中 $x_5、y_5$ 和 $x_6、y_6$ 分别代表梁单元左、右侧节点的平动位移, $\theta_{x5}、\theta_{y5}$ 和 $\theta_{x6}、\theta_{y6}$ 分别代表梁单元的左、右侧节点围绕平动轴的转动位移。

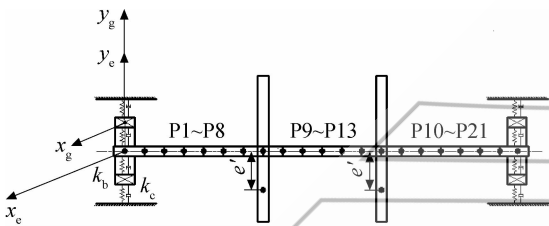


图 1 双盘转子-滚动轴承-SFD 模型示意图

Fig. 1 Schematic diagram of double disk rotor-rolling bearing-SFD model

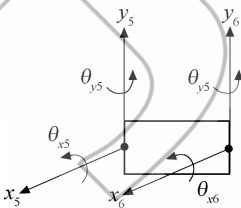


图 2 有限元梁单元

Fig. 2 Finite element beam element

将所有轴单元组合形成整体的质量矩阵、回转矩阵和刚度矩阵,写成动力学方程组如式(1)所示。

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} + \mathbf{J}/2 & 0 \\ 0 & \mathbf{M} + \mathbf{J}/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}}_1 \\ \ddot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \Omega \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{J} \\ -\mathbf{J} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{q}}_1 \\ \dot{\mathbf{q}}_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & 0 \\ 0 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_1 \\ \mathbf{q}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{F}(t)_{4n \times 1} \quad (1)$$

其中 $\mathbf{q}_1^T = [y_1 \ \theta_{y1} \ y_2 \ \theta_{y2} \ \cdots \ y_n \ \theta_{yn}]$, $\mathbf{q}_2^T = [z_1 \ \theta_{z1} \ z_2 \ \theta_{z2} \ \cdots \ z_n \ \theta_{zn}]$ 。 $\mathbf{M}$ 为整个转轴的质量组装矩阵,由单元质量矩阵 $\mathbf{M}_e$ 组成。 $\mathbf{J}$ 和 $\mathbf{K}$ 分别为转子系统的总装回转矩阵和刚度矩阵,分别由单元回转矩阵 $\mathbf{J}_e$ 和单元刚度矩阵 $\mathbf{K}_e$ 组成, $\mathbf{F}(t)_{4n \times 1}$ 为外载荷矢量矩阵^[22-24]。单元质量、单元回转和单元刚度矩阵 $\mathbf{M}_e、\mathbf{J}_e$ 和 $\mathbf{K}_e$ 如下所示:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_e &= \frac{\rho A l}{(1 + \phi)^2} \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_5 & -m_4 & m_6 \\ m_3 & -m_4 & m_1 & -m_2 \\ m_4 & m_6 & -m_2 & m_5 \end{bmatrix} \\ \mathbf{J}_e &= \frac{\rho A l}{(1 + \phi)^2} \cdot \frac{2I}{Al^2} \begin{bmatrix} m_7 & m_8 & -m_7 & m_8 \\ m_8 & m_9 & -m_8 & m_{10} \\ -m_7 & -m_8 & m_7 & -m_8 \\ m_8 & m_{10} & -m_8 & m_9 \end{bmatrix} \\ \mathbf{K}_e &= \frac{EI}{l^3(1 + \phi)} \cdot \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & l^2(4 + \phi) & -6l & l^2(2 - \phi) \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & l^2(2 - \phi) & -6l & l^2(4 + \phi) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{13}{35} + \frac{7\phi}{10} + \frac{\phi^2}{3}, \\ m_2 &= l \left(\frac{11}{210} + \frac{11\phi}{120} + \frac{\phi^2}{24} \right), \\ m_3 &= \frac{9}{70} + \frac{3\phi}{10} + \frac{\phi^2}{6}, \\ m_4 &= -l \left(\frac{13}{420} + \frac{3\phi}{40} + \frac{\phi^2}{24} \right), \\ m_5 &= l^2 \left(\frac{1}{105} + \frac{3\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} \right), \\ m_6 &= -l^2 \left(\frac{1}{140} + \frac{\phi}{60} + \frac{\phi^2}{120} \right), \\ m_7 &= \frac{6}{5}, m_8 = l \left(\frac{1}{10} - \frac{\phi}{2} \right), \\ m_9 &= l^2 \left(\frac{2}{15} + \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{3} \right), \\ m_{10} &= l^2 \left(-\frac{1}{30} - \frac{\phi}{6} + \frac{\phi^2}{6} \right) \end{aligned}$$

通过将所有的单元矩阵组合,可以得到转子部分的总有限元矩阵,在组装过程中单元的左侧

节点自由度同相邻的左侧单元右侧节点相连,类似的,右侧节点同右侧单元的左节点相连。同样的方法应用在质量矩阵 $\mathbf{M}$,回转矩阵 $\mathbf{J}$ 和刚度矩阵 $\mathbf{K}$ 组合上,以质量矩阵 $\mathbf{M}$ 为例,在左右节点相连位置由于矩阵叠加会出现 2 倍 m_1 的元素。在此之后,将转盘的质量和转动惯量增加到转轴的

质量矩阵上,外阻尼项增加到响应的回转矩阵中。最终的 $\mathbf{M}$ 、 $\mathbf{K}$ 、 $\mathbf{J}$ 由 $\mathbf{M}_x$ 、 $\mathbf{M}_y$ 、 $\mathbf{K}_x$ 、 $\mathbf{K}_y$ 、 $\mathbf{J}_x$ 、 $\mathbf{J}_y$ 以对角矩阵的形式组成。由于在除了重力以外的 x 和 y 方向是完全对称的,所以,以 y 向为代表, $\mathbf{M}_y$ 、 $\mathbf{K}_y$ 、 $\mathbf{J}_y$ 如下所示:

$$\mathbf{M}_y = \frac{\rho A l}{(1 + \varphi)^2} \cdot$$

m_1

m_2

m_3

m_4

0

0

m_2

m_5

$-m_4$

m_6

0

0

m_3

$-m_4$

$2m_1$

0

m_3

m_4

m_4

m_6

0

$2m_5$

$-m_4$

m_6

0

0

m_3

$-m_4$

$2m_1$

0

0

0

m_4

m_6

0

$2m_5$

$\ddots$

$2m_1$

0

m_3

m_4

0

0

0

$2m_5$

$-m_4$

m_6

0

0

m_3

$-m_4$

$2m_1$

0

m_3

m_4

m_4

m_6

0

$2m_5$

$-m_4$

m_6

0

0

0

0

m_1

$-m_2$

0

0

0

0

$-m_2$

m_5

$\mathbf{K}_y =$

$\mathbf{K}_1$

0

$\ddots$

0

$\mathbf{K}_n$

$\mathbf{K}_1 =$

$\frac{12EI_1}{l_1^3(1+\phi)}$

$\frac{6EI_1}{l_1^2(1+\phi)}$

$\frac{-12EI_1}{l_1^3(1+\phi)}$

$\frac{6EI_1}{l_1^2(1+\phi)}$

0

0

$\frac{6EI_1}{l_1^2(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_1}{l_1(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_1^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_1}{l_1(1+\phi)}$

0

0

$\frac{-12EI_1}{l_1^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_1^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_1}{l_1(1+\phi)} + \frac{12EI_2}{l_2^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_1^2(1+\phi)} + \frac{6EI_2}{l_2^2(1+\phi)}$

$\frac{-12EI_2}{l_2^3(1+\phi)}$

$\frac{6EI_2}{l_2^2(1+\phi)}$

$\frac{6EI_1}{l_1^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_1}{l_1(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_1^2(1+\phi)} + \frac{6EI_2}{l_2^2(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_1}{l_1(1+\phi)} + \frac{(4+\phi)EI_2}{l_2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_2}{l_2^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_2}{l_2(1+\phi)}$

$\frac{-12EI_2}{l_2^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_2}{l_2^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_2}{l_2(1+\phi)} + \frac{12EI_3}{l_3^3(1+\phi)}$

$\frac{EI_2}{l_2(1+\phi)} + \frac{12EI_3}{l_3^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_2}{l_2^2(1+\phi)} + \frac{6EI_3}{l_3^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_2^2(1+\phi)} + \frac{6EI_3}{l_3^2(1+\phi)}$

$\mathbf{K}_n =$

$\frac{EI_{n-2}}{l_{n-2}(1+\phi)} + \frac{12EI_{n-1}}{l_{n-1}^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-2}}{l_{n-2}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)}$

$\frac{-12EI_{n-1}}{l_{n-1}^3(1+\phi)}$

$\frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_{n-1}}{l_{n-1}(1+\phi)} + \frac{12EI_n}{l_n^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-12EI_n}{l_n^3(1+\phi)}$

$\frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-2}}{l_{n-2}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_1}{l_{n-2}(1+\phi)} + \frac{(4+\phi)EI_{n-1}}{l_{n-1}(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_{n-1}}{l_{n-1}(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)} + \frac{(4+\phi)EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_{n-1}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_n^2(1+\phi)} + \frac{6EI_3}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)} + \frac{(4+\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{-12EI_{n-1}}{l_{n-1}^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_{n-1}}{l_{n-1}(1+\phi)} + \frac{12EI_n}{l_n^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_{n-1}}{l_{n-1}(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_{n-1}}{l_{n-1}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_{n-1}}{l_{n-1}(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_{n-1}^2(1+\phi)} + \frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_1}{l_n^2(1+\phi)} + \frac{6EI_3}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)} + \frac{(4+\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

0

0

$\frac{-12EI_n}{l_n^3(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

0

0

$\frac{6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{(2-\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{-6EI_n}{l_n^2(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

$\frac{(4+\phi)EI_n}{l_n(1+\phi)}$

F_t 到 x 和 y 方向结果如下:

$$\begin{cases} F_x = F_r \cos \phi_j - F_t \sin \phi_j \\ F_y = F_t \cos \phi_j + F_r \sin \phi_j \end{cases} \quad (4)$$

因此, F_x 和 F_y 可以作为 F_{xs} 和 F_{ys} 代入转子系统矩阵式(5)中

$$\begin{bmatrix} M_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s \\ \ddot{x}_o \\ \ddot{y}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} C_s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C_s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_o & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_o \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \dot{x}_o \\ \dot{y}_o \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_s \\ y_s \\ x_o \\ y_o \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{xb} \\ F_{yb} \\ -F_{xb} + F_{xs} \\ -F_{yb} + F_{ys} \end{bmatrix} \quad (5)$$

接下来,采用 Newmark- β 和 Runge-Kutta 方法对微分方程式(5)进行求解。方程中的参数值如表 1 和表 2 所示。值得注意的是,Runge-Kutta 方法中滚动轴承力 F_{xb} 和 F_{yb} 由式(2)计算得到,迭代所用的 x 和 y 向位移值是有限元转子部分和轴承部分位移的插值。转子的轴端与相同位移的滚珠轴承内圈联接。迭代的细节将在下面的混合数值方法中介绍。

表 1 滚动轴承参数

Table 1 Parameters of rolling bearing

参数	数值
轴承外圈直径 $R_{out}/10^{-2}$ m	6.39
轴承内圈直径 $R_{in}/10^{-2}$ m	4.01
滚珠个数 N	12
接触刚度 $C_b/10^8$ (N/m)	1.33
径向间隙 $r_0/10^{-4}$ m	5

表 2 SFD 参数

Table 2 Parameters of SFD

参数	数值
油膜半径 $R_j/10^{-2}$ m	6.39
油膜宽度 $L_j/10^{-2}$ m	1.93
径向间隙 $c/10^{-5}$ m	7.5
黏度 $\mu/(\text{Pa} \cdot \text{s})$	0.05

2 综合数值方法

Newmark- β 法是一种能处理 M 、 J 、 K 大矩阵的显式数值方法,适用于求解线性有限元矩阵方程。在求解迭代过程中,需要外载荷和刚度矩阵来计算下一步的位移,然后求解速度和加速度。利用迭代公式可以处理有限元中的大尺度矩阵。

4 阶龙格库塔方法是一种能求解非线性转子动力学方程的数值方法。在迭代公式中,利用中间变量 k_1 、 k_2 、 k_3 和 k_4 从当前步骤的值中得到下一步的值,具体迭代格式见式(6)的龙格库塔部分。当前位移步计算 k_1 、 k_2 、 k_3 和 k_4 的步骤中存在一个关于位移的函数 F 。由于 F 的存在,滚动轴承和 SFD 的非线性力可以很容易地进入迭代步骤,这与 Newmark- β 方法不同。

结合这两种方法,提出了一种转子系统数值求解方法,如图 4 所示。方法中非线性支撑部件以变阻尼和变刚度作用在轴端,偏心力从轴端节点处作用于非线性支撑部件。图 4 中 s_1 、 v_1 、 a_1 分别为当前迭代步的位移、速度和加速度值, s_2 、 v_2 、 a_2 分别为下一步迭代得到的位移、速度和加速度值,由偏心力步得到的变量值通过 Newmark- β 迭代一次,得到 s_3 、 v_3 、 a_3 ,等同于下一周期的 s_1 、 v_1 、 a_1 ,如此循环得到最终解。采用 Newmark- β 结合法和 Runge-Kutta 法求解多盘转子的非线性支承力。因此,在动力学仿真中既可以考虑转子模型中的陀螺力矩等复杂结构特征,也可以考虑滚动轴承和 SFD 支承的复杂非线性。

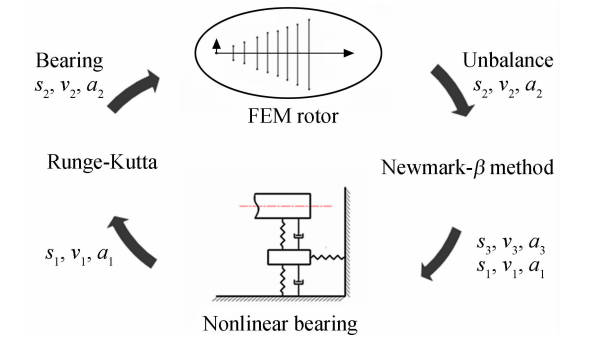


图 4 综合数值求解方法示意图

Fig. 4 Schematic diagram of combined numerical method

利用这两种方法的优点,提出了一种修正方法,步骤如下,迭代公式如式(5)所示。

1) 利用的 Runge-Kutta 方法,通过非线性部分的初始位移计算滚动轴承和 SFD 内部产生的力。

2) 在当前步骤中,轴承的线性刚度当前位移计算的力转化得到。然后将刚度加入到下一步有限元转子部分的刚度矩阵中。

3) 采用 Newmark- β 法计算有限元转子的位移。

4) 用 Newmark- β 法求出的有限元转子轴端位移与第一步迭代后的滚珠轴承内圈位移进行插值。

5) 在龙格库塔方法中,轴端与滚珠轴承内圈的插值位移将被分配回轴承部分,用于下一步的计算。

值得注意的是,在 Newmark- β 迭代法和龙格库塔迭代法中,球轴承的轴端和内圈是相互连接的,但有不同的位移,所以都需要插值。

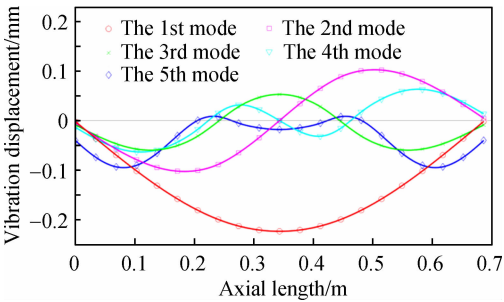


图 5 转子模态振型分布
Fig. 5 Modal shapes of rotor

响应的分岔图如图 6 所示,与简单转子模型的分岔图不同,分叉图中包含前两个固有频率或共振频率。图 1 中定义的所有节点 P1~P21 都可以显示 42.42 Hz 时的 1 阶临界转速,而 P8 更

$$\left\{ \begin{aligned} \mathbf{u}_t &= \frac{\mathbf{u}_{t-1} + \mathbf{x}_{t-1}}{2} \\ \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} &= \mathbf{F}_{t+\Delta t} + \mathbf{M}(\alpha_0 \mathbf{u}_t + \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_t) + \\ &\quad \mathbf{C}(\alpha_1 \mathbf{u}_t + \alpha_4 \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha_5 \ddot{\mathbf{u}}_t) \\ \bar{\mathbf{K}} \mathbf{u}_{t+\Delta t} &= \bar{\mathbf{F}}_{t+\Delta t} \\ \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \alpha_0 (\mathbf{u}_{t+\Delta t} - \mathbf{u}_t) - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}_t - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}_t \\ \dot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{u}}_t + \alpha_6 \ddot{\mathbf{u}}_t + \alpha_7 \ddot{\mathbf{u}}_{t+\Delta t} \\ \mathbf{x}_t &= \frac{\mathbf{x}_{t-1} + \mathbf{u}_{t+\Delta t}}{2} \\ \mathbf{k}_1 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_t, \mathbf{y}_t) \\ \mathbf{k}_2 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_t + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_t + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_1) \\ \mathbf{k}_3 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_t + \frac{1}{2}h, \mathbf{y}_t + \frac{1}{2}h\mathbf{k}_2) \\ \mathbf{k}_4 &= \mathbf{f}(\mathbf{x}_t + h, \mathbf{y}_t + h\mathbf{k}_3) \\ \mathbf{y}_{t+\Delta t} &= \mathbf{y}_t + \frac{h}{6}(\mathbf{k}_1 + 2\mathbf{k}_2 + 2\mathbf{k}_3 + \mathbf{k}_4) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

3 非线性转子有限元模型求解

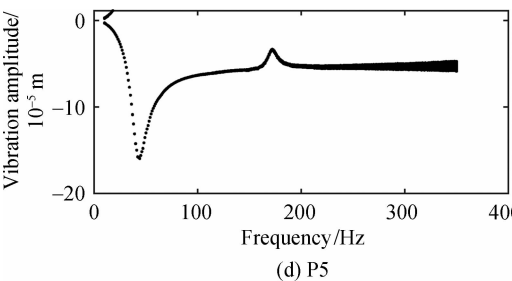
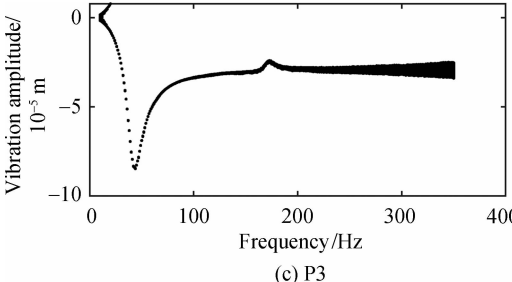
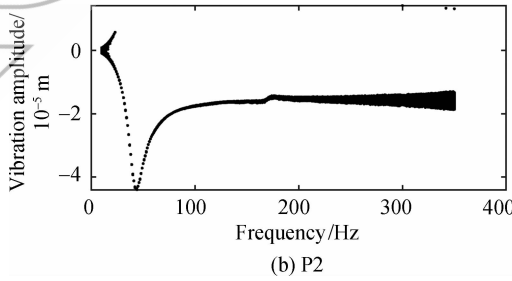
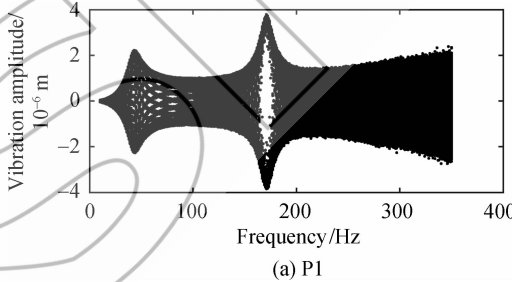
采用文中第 2 节所述的修正方法,对具有支承非线性的有限元转子模型的响应进行了数值研究。计算了转子固有频率,在表 3 中列出。

表 3 有限元转子的临界转速频率

Table 3 Critical speed frequency of FEM rotor

参数	临界转速阶数				
	1	2	3	4	5
频率/Hz	42.42	173.23	516.41	748.47	1243.57

模态振型如图 5 所示。当转子系统加速时,它将通过所有临界转速。可以观察到的主要振型是前三种振型。



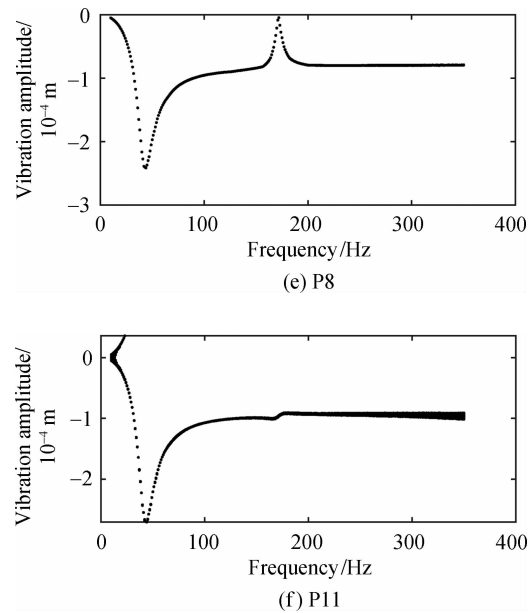


图 6 不同节点的分岔图

Fig. 6 Bifurcation diagram of different nodes

好地显示 173.23 Hz 的 2 阶临界转速。在简单的转子模型中出现了一些非线性现象,如混沌运并未在综合模型中出现。一个可能的原因是,在数值模拟过程中,利用有限元转子模型的柔度可以滤除复杂运动中的高频振动分量。

柔性转子模型不同节点的轨道如图 7 所示。节点 1、3、4、6 的运动可能是周期的,轨道基本上是一个圆环,但是,节点 21 的轨道是相当无序的。因此,对于不同的圆盘或不同的位置,转子的响应可能会有显著的差异。这种现象不同于简单的转子模型,即圆盘和两端的响应总是相似的。

对于节点 1、3、4、6、9、12、15、17、21,在图 8

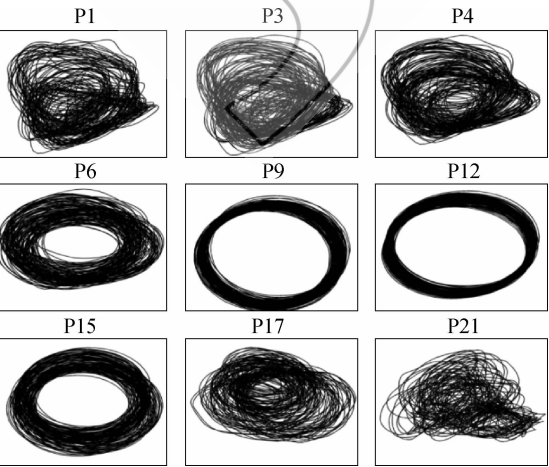


图 7 900 rad/s 转速下不同节点轴心轨迹

Fig. 7 Orbits of shaft center of different nodes at rotational speed 900 rad/s

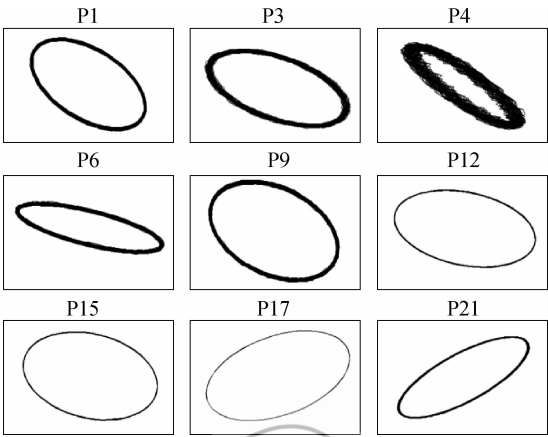
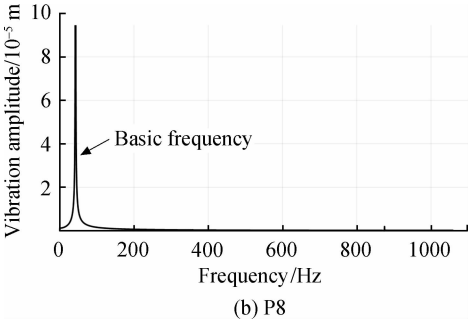
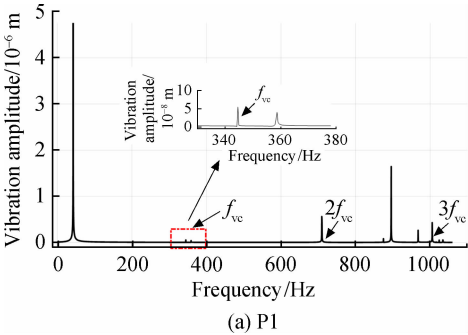


图 8 具有不同最大振幅方向的轴心轨迹图

Fig. 8 Orbits of shaft center with different maximum vibration amplitude directions

所示的相同转速下,不同圆盘的轨迹可以是类似的椭圆,但椭圆的大直径方向明显不同。这一现象表明转子轴存在扭转力矩,采用 Timoshenko 梁 8 自由度有限单元模拟时存在,在 Jeffcott 转子模型中并不能得到体现。

由于有限元转子模型由滚动轴承和 SFD 支承,响应谱包含了两部分产生的频率分量。滚动轴承的特征频率等于滚动球数乘以旋转频率。当旋转频率为 42 Hz 时,14 个滚珠轴承的变柔振动特征频率 f_{vc} 为 352 Hz,特别是节点 1 和节点 21 的响应会有滚动轴承的特征频率,因为它们靠近轴承,如图 9 所示。注意 $2f_{vc}$ 和 $3f_{vc}$ 变柔振动频率可以在位于弹性轴中间的节点 8 响应的频谱中同时观察到。



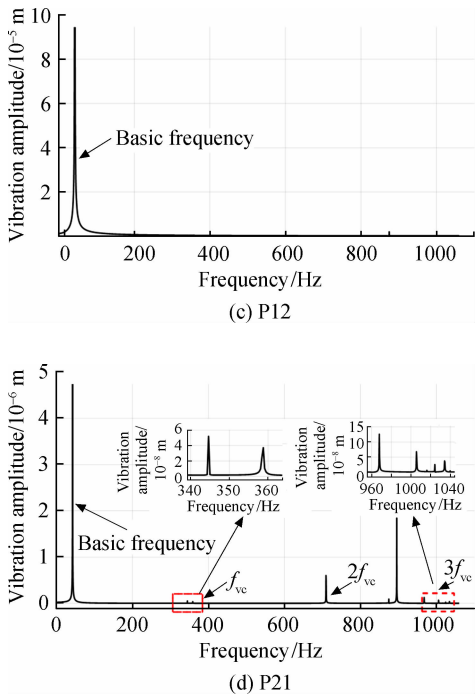


图 9 节点 1、8、12、21 的频谱图

Fig. 9 Spectrum diagram of node of 1,8,12,21

4 结 论

本文研究了一类具有局部非线性的 SFD 滚动轴承支承载转子系统。提出了一种基于 Newmark-β 和 4 阶 Runge-Kutta 方法的组合数值计算方法,并用于转子的数值模拟。结论总结如下:

- 1) 整个转子系统的自由度较多,但非线性却只存在于个别自由度上,这是一类典型的转子系统。本文的混合数值方法有效的针对此类转子系统,可以同时考虑转子的复杂结构和非线性支撑。
- 2) 在特定转速下,转子不同位置的响应可能存在显著差异,倍周期运动和概周期运动可能同时发生在不同节点位置。
- 3) 在相同的转速下,不同节点的轨迹均为椭圆形,但椭圆的大直径方向存在相位差。这种现象可能意味着转子轴上存在扭矩,而这一扭矩在简单的转子模型中不会得到体现。
- 4) 有限元转子模型中滚动球的频率分量由于柔性轴而不在转盘上得以体现,仅在轴端体现。

参考文献:

[1] 陈予恕,张华彪. 航空发动机整机动力学研究进展与展望[J]. 航空学报,2011,32(8):1371-1391.
CHEN Yushu, ZHANG Huabiao. Review and prospecton the research of dynamics of complete aero-engine systems [J]. Acta Aeronautica et Astronautica Sinica, 2011, 32(8):

1371-1391. (in Chinese)
[2] DING Q. Backward whirl and its suppression of a squeeze film damper mounted rotor/casing system in passage through critical speed with rubs[J]. Journal of Vibration and Control, 2004, 10(4): 561-573.
[3] 周海伦,陈果. 航空发动机双转子-滚动轴承-机匣耦合系统动力学分析[J]. 航空动力学报, 2009, 24(6): 1284-1291.
ZHOU Hailun, CHEN Guo. Dynamic response analysis of dual rotor-ball bearing-stator coupling system for aero-engine[J]. Journal of Aerospace Power, 2009, 24(6): 1284-1291. (in Chinese)
[4] BABU T N, RAJ T M, LAKSHMANAN T. A review on application of dynamic parameters of journal bearing for vibration and condition monitoring[J]. Journal of Mechanics, 2015, 31(4): 391-416.
[5] DING Q, ZHANG K P. Order reduction and nonlinear behaviors of a continuous rotor system[J]. Nonlinear Dynamics, 2012, 67(1): 251-262.
[6] LIN C W, LIN Y K, CHU C H. Dynamic models and design of spindle-bearing systems of machine tools: a review [J]. International Journal of Precision Engineering and Manufacturing, 2013, 14: 513-521.
[7] ZHAI W M. Two simple fast integration methods for large-scale dynamic problems in engineering[J]. International Journal for Numerical Methods in Engineering, 1996, 39(24): 4199-4214.
[8] CHAVEZ J P, HAMANEH V V, WIERCIGCHO M. Modelling and experimental verification of an asymmetric Jeffcott rotor with radial clearance[J]. Journal of Sound and Vibration, 2015, 334(1): 86-97.
[9] YUAN Z W, CHU F L, LIN Y L. External and internal coupling effects of rotor's bending and torsional vibrations under unbalances[J]. Journal of Sound and Vibration, 2007, 299(1/2): 339-347.
[10] YANG J, CAO S Q. Dynamic response analysis of turbo-charger totor of UAV during hovering movements[R]. Tianjin: the 16th International Conference on Mechatronics Technology, 2012.
[11] JIANG Y, GAO Y, AN Q. Dynamic analysis of the rotor supported by journal bearing with micro-spherical surface texturing[J]. Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers: Part K Journal of Multi-body Dynamics, 2014, 228(4): 355-365.
[12] LITAK G, SAWICKI J T. Regular and chaotic vibrations in the rub impact model of a Jeffcott rotor with a fractional restore force[J]. European Physical Journal Applied Physics, 2013, 64(3): 31303. 1-31303. 5.
[13] JAHROMI A F, BHAT R B, XIE W F. Forward and backward whirling of a rotor with gyroscopic effect[J]. Vibration Engineering and Technology of Machinery, 2014, 23: 879-888.
[14] DING Q, COOPER J E, LEUNG A Y. Hopf bifurcation analysis of a rotor/seal system[J]. Journal of Sound and Vi-

bration,2002,252(5):817-833.

[15] 刘建勇,袁巍,陆亚钧.周向局部处理机匣对压气机影响的数值研究[J].航空动力学报,2010,25(7):1609-1614.
LIU Jianyong,YUAN Wei,LU Yajun. Numerical investigation about the effect of a partial circumference casing treatment on a compressor[J]. Journal of Aerospace Power,2010,25(7):1609-1614. (in Chinese)

[16] 吴志广,王克明,张利民.静子叶片内环结构对机匣动力特性的影响[J].沈阳航空工业学院学报,2010,27(4):23-27.
WU Zhiguang,WANG Keming,ZHANG Liming. Affecting of stator vane inner structure on receiver dynamic[J]. Journal of Shenyang Institute of Aeronautical Engineering,2010,27(4):23-27. (in Chinese)

[17] 马威猛,王建军.双重非对称转子支承系统实体有限元动力分析[J].振动与冲击,2014,33(23):17-22,44.
MA Weimeng,WANG Jianjun. Dynamic analysis method of an anisotropic and asymmetric rotor-bearing system based on 3D FEM[J]. Rock and Vibration,2014,33(23):17-22,44. (in Chinese)

[18] BROUWER M D,SADEGHI F. Investigation of turbo-charger dynamics using a combined explicit finite and discrete element method rotor-cartridge model[J]. Journal of Tribology,2016,139(1):012201.1-012201.8.

[19] 陈果.航空发动机整机振动耦合动力学模型及其验证[J].航空动力学报,2012,27(2):241-254.
CHEN Guo. A coupling dynamic model for whole aero-engine vibration and its verification[J]. Journal of Aerospace Power,2012,27(2):241-254. (in Chinese)

[20] BUCHER C,PIRROTTA A. Dynamic finite element analysis of fractionally damped structural systems in the time domain[J]. Acta Mechanica,2015,226(12):3977-3990.

[21] WANG S,WANG Y,ZI Y,HE Z. A 3D finite element-based model order reduction method for parametric resonance and whirling analysis of anisotropic rotor-bearing systems[J]. Journal of Sound and Vibration,2015,359:116-135.

[22] LOGAN D L. A first course in the finite element method [M]. Prattville, Alabama, USA: Cengage Learning (CL) Engineering,2011.

[23] 张文.转子动力学基础[M].北京:科学出版社,1990.

[24] NELSON H D. A finite rotating shaft element using timoshenko beam theory[J]. Journal of Mechanical Design,1980,102(4):793-803.

(编辑:李岩梅、王碧琚)